O životu, univerzumu i svemu ostalom

http://www.mmilan.com/

# Obične diferencijalne jednačine prvog i drugog reda

*Author:*
Milan Milošević

# 1 Diferencijalne jednačine prvog reda

## 1.1 Razdvojene promenljive

$$y' = f(x) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx \\ y &= \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C \end{aligned} \tag{2}$$

U opštem slučaju:

$$\begin{aligned} & f(x)dx + g(y)dy = 0 \\ & \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} g(y)dy = C \end{aligned} \tag{3}$$

## 1.2 Homogena diferencijalna jednačina

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

Smenom: $\begin{array}{l} y = u \cdot x \\ y' = u' \cdot x + u \end{array}$ polazna jednačina postaje:

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u &= f(u) \\ x \cdot du &= (f(u) - u)dx \end{aligned} \tag{5}$$

tj. diferencijalna jednačina oblika (1)

***Primedba:*** diferencijalna jednačina oblika:

$$y' = \left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) \tag{6}$$

gde je $a, b, c, A, B, C = const$, može se svesti na jednačinu oblika (4). Moguća su dva slučaja:

***1°)*** Ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$ smenom: $\begin{array}{l} y = u + \alpha \\ x = v + \beta \end{array}$ jednačina (6) postaje:

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{av + bu + a\beta + b\alpha + c}{Av + Bu + A\beta + B\alpha + C}\right) \tag{7}$$

Sistem jednačina:

$$\begin{aligned} a\beta + b\alpha + c = 0 \\ A\beta + B\alpha + C = 0 \end{aligned}$$

ima rešenje po $\alpha$ i $\beta$ pa jednačina (7) postaje:

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{av + bu}{Av + Bu}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{u}{v}}{A + B\frac{u}{v}}\right) \tag{8}$$

a to je jednačina oblika (4).

***2⁰)*** Neka je $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$, tj. $\begin{array}{l} A = ka \\ B = kb \end{array}$ gde je $k$ konstanta. Smenom $ax + by = u$, gde je $u$ nova nepoznata f-ja promenljive $x$. Jednačina (6) postaje:

$$u' = a + b \cdot f\left(\frac{u+c}{ku+c}\right) \tag{9}$$

odnosno jednačina oblika (1).

## 1.3 Linearna diferencijalna jednačina

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \tag{10}$$

Ako je $g(x) = 0$ jednačina (10) se naziva homogena linearna diferencijalna jednačina.

***1$^o$)*** Homogena jednačina:

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \tag{11}$$

za $y \neq 0$ postaje:

$$\frac{1}{y}dy = -f(x) \cdot dx \tag{12}$$

tj. jednačina oblika (1) čije je rešenje:

$$y = C \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} \tag{13}$$

Može se uzeti $C = 0 \Rightarrow y = 0$ kao rešenje jednačine (11).

***2$^o$)*** Da bi rešili (10) pretpostavimo $C = C(x)$:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} \tag{14}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} - C(x) \cdot f(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} \tag{15}$$

ako se jn-e (14) i (15) zamene u (10) dobija se:

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} &= g(x) \\ C'(x) &= g(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} \end{aligned} \tag{16}$$

odnosno:

$$C(x) = C + \int\limits_{x_0}^{x} g(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} \tag{17}$$

pa je opšte rešenje jednačine (10):

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx} \cdot (C + \int\limits_{x_0}^{x} g(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx}) \tag{18}$$

U eksplicitnom obliku opšte rešenje jednačine (10) dato je kao:

$$y = C \cdot F_1(x) + F_2(x)$$

tj. rešenje je izraženo kao linearna funkcija integracione konstante.

## 1.4 Bernulijeva jednačina

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^r \tag{19}$$

Gde je $r \in R$, za $r = 0$ ili $r = 1$ jednačina (19) postaje linearna.

Uvoenjem smene $\begin{array}{c} y = z^k \\ y' = k \cdot z^{k-1} \cdot z' \end{array}$, gde je $z$ nova nepoznata f-ja a $k$ konstanta, jednačina (19) postaje:

$$k \cdot z^{k-1} \cdot z' + f(x) \cdot z^k = g(x) \cdot z^{kr}$$

$$z' + \frac{1}{k} f(x) \cdot z = \frac{1}{k} g(x) \cdot z^{kr-k+1} \tag{20}$$

Konstantu $k$ treba izabrati tako da je:

$$kr - k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{1-r}$$

Posle ove smene jednačina (20) glasi:

$$z' + \frac{1}{k} f(x) \cdot z = \frac{1}{k} g(x) \tag{21}$$

a to je linearna jednačina. Opšte rešenje ove jednačine ima oblik:

$$z = C \cdot F_1(x) + F_2(x)$$

Prema tome, opšte rešenje Bernulijeve jednačine može se izraziti u eksplicitnom obliku:

$$y = (C \cdot F_1(x) + F_2(x))^{\frac{1}{1-r}}$$

## 1.5 Rikartijeva jednačina

$$y' + f(x) \cdot y^2 + g(x) \cdot y + h(x) = 0 \tag{22}$$

Za $h(x) \equiv 0$ i $f(x) \equiv 0$ jednačina postaje Bernulijeva jednačina (19), odnosno linearna jednačina (10). U opštem slučaju jednačina (22) se ne može rešiti.

Ako je poznato jedno partikularno rešenje može se dobiti i opšte rešenje jednačine (22).

Smenom $y = y_1 + \frac{1}{z}$, gde je $y_1(x)$jedno partikularno rešenje a $z$ nova nepoznata funkcija jednačina (22) postaje:

$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' + f(x) \left( y_1^2 + 2y_1 \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + g(x) \left( y_1 + \frac{1}{z} \right) + h(x) = 0$$

$$z' - (2y_1 \cdot f(x) + g(x))z - f(x) = 0 \tag{23}$$

a to je linearna jednačina. Opšte rešenje ove jednačine ima oblik:

$$z = CF_1(x) + F_2(x)$$

Prema tome opšte rešenje Rikartijeve jednačine (22) ima oblik:

$$y = \frac{CF(x) + G(x)}{Ch(x) + K(x)}$$

gde je $C$ proizvoljna konstanta a $F, G, H$i $K$odreene funkcije.

## 1.6 Klerova jednačina

$$y = xy' + f(y') \tag{24}$$

Smenom $y' = p$ jednačina postaje:

$$y = xp + f(p) \tag{25}$$

odakle se, nakon diferenciranja po $x$, dobija:

$$\begin{aligned} p &= p + xp' + f'(p)p' \\ (x + f'(p))p' &= 0 \end{aligned}$$

***1$^0$)*** Ako je $p' = 0 \Rightarrow p = C$ pa na osnovu jednačine (25) opšte rešenje jednačine (24) ima oblik:

$$y = Cx + f(C)$$

***2$^o$)*** Ako je $x + f'(p) = 0$ eliminacijom $p$ iz jednačina $\begin{matrix} x + f'(p) = 0 \\ y = xp + f(p) \end{matrix}$ dobija se singularno rešenje jednačine (24) koje nije izraženo u opštem rešenju.

## 1.7 Lagranževa jednačina

$$y = xf(y') + g(y') \tag{26}$$

Ova jednačina se rešava slično kao i Klerova. Posle smene $y' = p$ jednačina dobija oblik:

$$y = xf(p) + g(p)$$

odakle se, nakon diferenciranja, dobija:

$$p = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p'$$

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + f'(p)x = -g'(p) \tag{27}$$

Ako je $f(p) \equiv p$ jednačina (26) je Klerova, pretpostavimo onda da je $f(p) \neq p$ tada jednačina (27) postaje:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = -\frac{g'(p)}{f(p) - p} \tag{28}$$

a to je linearna jednačina. Jednačina (28) ima rešenje oblika

$$x = CF_1(p) + F_2(p)$$

pa je opšte rešenje Lagranževe jednačine (26) u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x &= CF_1(p) + F_2(p) \\ y &= xf(p) + g(p) \end{aligned} \tag{29}$$

## 1.8 Jednačina prvog reda drugog stepena

$$(y')^2 + A(x,y)y' + B(x,y) = 0 \tag{30}$$

Ako se jednačina (30) može napisati u obliku:

$$(y' - F_1(x,y)) \cdot (y' - F_2(x,y)) = 0$$

tada se rešavanje jednačine (30) svodi na rešavanje dve jednačine prvog stepena:

$$\begin{aligned} y' - F_1(x,y) &= 0 \\ y' - F_2(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Opšta rešenja ovih jednačina su $\begin{aligned} G_1(x,y,C) &= 0 \\ G_2(x,y,C) &= 0 \end{aligned}$ pa je opšte rešenje jednačine (30):

$$G_1(x,y,C) \cdot G_2(x,y,C) = 0$$

gde je $C$proizvoljna konstanta.

## 1.9 Totalni diferencijal

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{32}$$

gde funkcije $P$i $Q$ imaju neprekidne parcijalne izvode po $x$ i $z$. Ako postoji funkcija $u(x,y)$ takva da važi:

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{33}$$

tada se jednačina (32) naziva jednačina sa totalnim diferencijalom, ili egzaktna diferencijalna jednačina..

Opšte rešenje egzaktne diferencijalne jednačine (32) odreeno je relacijom:

$$u(x,y) = C$$

gde je $C$ proizvoljna konstanta.

Da bi se odredila funkcija $u$, za koju važi (33), treba poći od jednakosti:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

odakle se, uporeivanjem sa (33) dobija:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \tag{34}$$

odnosno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ovi mešoviti izvodi su po pretpostavci neprekidni pa su i jednaki, pa je, prema tome, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ potreban uslov da jednačina (32) bude sa totalnim diferencijalom.

Ako je ovaj uslov ispunjen iz prve jednačine u (34) dobija se:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + f(y) \tag{35}$$

gde je $f(y)$neprekidna funkcija. Diferenciranjem izraza (35) dobija se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + f'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + f'(x) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + f'(y) \tag{36}$$

Druga jednačina u (34) i jednačina (36) daju:

$$\begin{gathered} Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + f'(y) \\ f'(y) = Q(x_0,y) \\ f(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K \end{gathered}$$

gde je $K$ proizvoljna konstanta.

Konačno se dobija:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K$$

pa je opšte rešenje jednačine (32) dato sa:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

gde je $C$ proizvoljna konstanta.

# 2 Diferencijalne jednačine drugog reda

## 2.1 Slučaj svoenja na jednačinu prvog reda

Opšta diferencijalna jednačina drugog reda ima oblik:

$$F(x,y,y',y'') = 0 \tag{37}$$

U nekim slučajevima jednačina (37) može se svesti na diferencijalnu jednačinu prvog reda.

$$F(x,y',y'') = 0$$

Pomoću smene $\begin{matrix} u = y' \\ u' = y'' \end{matrix}$ ova jednačina se svodi na jednačinu prvog reda oblika:

$$F(x,u,u') = 0.$$

$$F(y,y',y'') = 0$$

Za rešavanje ovakve jednačine treba koristiti smenu$y' = u$. Tada se dobija $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$. Tada polazna jednačina postaje jednačina prvog reda:

$$F\left(y,u,u\frac{du}{dy}\right) = 0$$

## 2.2 Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{38}$$

Rešenje jednačine (38) treba tražiti u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je $\lambda$ konstanta. Odavde se dobija $\begin{array}{c} y' = \lambda e^{\lambda x} \\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{array}$ pa jednačina (38) dobija oblik::

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{39}$$

Dakle, $e^{\lambda x}$ je rešenje jednačine (38) ako $\lambda$ zadovoljava tzv. karakterističnu jednačinu (39).

Moguća su tri slučaja:

***1*$^0$*)*** $\lambda_1, \lambda_2 \in$ R i $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tada su $\begin{array}{c} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{array}$ linearno nezavisna rešenja jednačine (38) pa je opšte rešenje jednačine dato sa:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

gde su $C_1$ i $C_2$ proizvoljne konstante.

***2*$^0$*)*** $\lambda_1, \lambda_2 \in$ C i $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tada je $\begin{array}{c} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{array}$ $(\alpha, \beta \in R \text{ i } \beta \neq 0)$. Na osnovu prethodnog slučaja rešenje jednačine (38) može se izraziti u obliku:

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{40}$$

Pošto je $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ rešenje (40) može se transformisati u sledeći oblik:

$$\begin{array}{l} y = e^{ax}\left[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] \\ y = e^{ax}\left[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x\right] \end{array}$$

$$y = e^{ax}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \tag{41}$$

gde su $A$i $B$ proizvoljne konstante.

***3*$^0$*)*** $\lambda_1, \lambda_2 \in$ R i $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ u ovom slučaju partikularna rešenja $\begin{array}{c} y_1 = e^{\lambda x} \\ y_2 = xe^{\lambda x} \end{array}$ jednačine (38) su linearno nezavisna pa opšte rešenje glasi:

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + xC_2)$$

## 2.3 Nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$$ay'' + by' + cy = h(x) \tag{42}$$

Rešenje odgovarajuće homogene jednačine, oblika (38), može se uvek odrediti pa se uvek može odrediti i rešenje jednačine (42). U opštem slučaju za rešavanje ove jednačine koristi se *metod varijacije konstanata*, ali za neke specijalne oblike funkcije $h(x)$taj metod se može izbeći:

***1$^0$)*** $h(x) = a_n x^x + a_{n-a}x^{n-1} + ... + a_0$

Ako je $c \neq 0$ partikularno rešenje jednačine (42) treba tražiti u obliku polinoma:

$$y = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0 \tag{43}$$

Koeficijenti polinoma polinoma (43) dobijaju se *metodom neodredjenih koeficijenata.*

Ako je $c = 0$ i $b \neq 0$ partikularno rešenje treba tražiti u obliku:

$$y = x\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0\right)$$

Za $b = c = 0$ rešenje jednačine (42) dobija se direktnom integracijom.

### *Metod neodredjenih koeficijenata*

Naći sve izvode rešenja (43):

$$\begin{aligned}
&y = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_2x^2 + A_1x + A_0\\
&y' = nA_n x^{n-1} + (n-1)A_{n-1}x^{n-2} + ... + 2A_2x + A_1\\
&y'' = n(n-1)A_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_{n-1}x^{n-3} + ... + 2A_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathrm{y}^{(\mathrm{n})} = n!A_n
\end{aligned}$$

Sve dobijene izvode vratiti u jednačinu (42) a zatim izjednačiti koeficijente uz odgovarajuće članove.

***2$^0$)*** $h(x) = Ae^{ax}$

U zavisnosti od rešenja karakteristične jednačine:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{44}$$

partikularno rešenje treba tražiti u obliku:
a) $y = Ke^{ax}$ za $\lambda \neq a$
b) $y = Kxe^{ax}$ za $\lambda_1 = a$
c) $y = Kx^2e^{ax}$ za $\lambda_1 = \lambda_2 = a$
gde je $K$ privremeno neodredjena konstanta.

***3$^0$)*** $h(x) = A\cos px + B\sin px$

Ako $ip$ nije koren karakteristične jednačine (44) partikularno rešenje treba tražiti u obliku:

$$y = K_1\cos px + K_2\sin px$$

a ako jeste, onda rešenje tražiti u obliku:

$$y = x(K_1\cos px + K_2\sin px)$$

***4$^0$)*** $h(x) = e^{ax}P_n(x)$**,** gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena

Ako $a$ nije rešenje karakteristične jednačine (44) tada je $y = e^{ax}Q_n(x)$, gde je $Q_n(x)$ polinom n-tog stepena sa neodredjenim koeficijentima. Ako je $a$ rešenje jednačine (44) onda je $y = x^re^{ax}Q_n(x)$, gde je $r$ višestrukost rešenja $a$ ($r = 1$ ili $r = 2$).

***5$^0$)*** $h(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

Ako $\alpha \pm i\beta$ nije rešenje karakteristične jednačine (44) uzeti:

$$y = e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x\right]$$

gde su $S_N(x)$i $T_N(x)$polinomi stepena $N = \max\{n, m\}$.

U suprotnom slučaju, ako je $\alpha \pm i\beta$ rešenje karakteristične jednačine onda je:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x\right]$$

gde je $r$ višestrukost rešenja $\alpha \pm i\beta$ (za jednačine drugog reda $r = 1$).

## 2.4 Ojlerova linearna jednačina drugog reda

$$ax^2y'' + bxy' + cy = h(x) \tag{45}$$

Prvo treba rešiti odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{46}$$

Ako se pretpostavi da jednačina (45) ima rešenje oblika $y = x^\lambda$ ($\lambda$je parametar koji treba odrediti) tada je $\begin{array}{l} y' = \lambda x^{\lambda-1} \\ y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \end{array}$ pa jednačina (46) postaje:

$$\left[a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c\right]x^\lambda = 0$$

$$a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0 \tag{47}$$

Razlikuje se nekoliko slučajeva:

***1***$^0$***)*** $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$

Opšte rešenje jednačine (46) glasi:

$$y = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2}$$

gde su $C_1$ i $C_2$ proizvoljne konstante.

***2***$^0$***)*** $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{C},\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

U ovom slučaju, iz

$$\begin{gathered} y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha\left(C_1x^{i\beta} + C_2x^{-i\beta}\right) \\ x^{i\beta} = e^{i\beta\log x} = \cos(\beta\log x) + i\sin(\beta\log x) \end{gathered}$$

dobija se opšte rešenje jednačine (46) u obliku:

$$y = x^\alpha\left(A_1\cos(\beta\log x) + A_2\sin(\beta\log x)\right)$$

gde su $A_1$ i $A_2$ proizvoljne konstante.

***3***$^0$***)*** $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

U ovom slučaju partikularna rešenja jednačine (46) su $y = x^\lambda$ i $y = x^\lambda\log x$ pa je opšte rešenje glasi:

$$y = (C_1 + C_2\log x)\,x^\lambda$$

gde su $C_1$ i $C_2$ proizvoljne konstante.

U sva tri slučaja prećutno je pretpostavljeno da je $x > 0$. Ako je $x < 0$ treba poći od rešenja oblika $y = (-x)^\lambda$.

Opšte rešenje nehomogene jednačine (45) dobija se iz opšteg rešenja homogene jednačine (46) standardnim *metodom varijacije konstanata.*